



TITLE:

# Existence of infinitely many solutions for a perturbed elliptic equation with exponential growth

AUTHOR(S):

杉村, 邦彦

---

CITATION:

杉村, 邦彦. Existence of infinitely many solutions for a perturbed elliptic equation with exponential growth. 数理解析研究所講究録 1993, 834: 91-103

ISSUE DATE:

1993-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83426>

RIGHT:

# Existence of infinitely many solutions for a perturbed elliptic equation with exponential growth

名大理 杉村邦彦 (Kunihiko Sugimura)

## 1. Introduction

次の非線形 Dirichlet 問題を考える.

$$(1) \begin{cases} -\Delta u = g(x, u) + f(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

ここで,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  は有界領域, その境界  $\partial\Omega$  はなめらかで,  $\forall f \in L^2(\Omega)$  とする. さらに, 非線形項  $g$  は次の条件をみたすものとする.

$$(g1) \quad g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

$$(g2) \quad \exists A_0 > 0 \text{ s.t. } |g(x, \xi)| \leq A_0 e^{\Phi(\xi)} \text{ for } (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R},$$

$$\text{ここに, } \Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(\xi)\xi^{-2} \rightarrow 0 \text{ } (|\xi| \rightarrow \infty).$$

$$(g3) \quad \exists \mu > 0, \exists r_0 \geq 0 \text{ s.t.}$$

$$0 < \mu G(x, \xi) \equiv \mu \int_0^\xi g(x, t) dt \leq \xi g(x, \xi) \text{ for } x \in \bar{\Omega}, |\xi| \geq r_0.$$

$$(g4) \quad g(x, -\xi) = -g(x, \xi) \text{ for } (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

特に  $f=0$  の場合, 方程式 (1) は条件 (g4) のもとに対称性をもつ

ことから,  $N=2$ のとき条件(91)~(94),  $N \geq 3$ のとき条件(91), (93), (94)および

$$(2) \begin{cases} \exists B_0 > 0, 1 < s < \frac{N+2}{N-2} \text{ s.t.} \\ |g(x, \xi)| \leq B_0(1+|\xi|^s) \text{ for } (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

なる growth 条件のもとで, 無限個の解 ( $H^1$ -solution) をもつことが知られている (cf. [AR]).

一方,  $f \neq 0$  の場合は, Bahri-Berestycki [BB], Struwe [St], Rabinowitz [R] らによって研究され, 特に Rabinowitz は, 条件(91), (93), (94)に加えて growth 条件(2)中の  $s$  を次のように制限した上で, 方程式(1)は無限個の解をもつことを示した.

$$\frac{(N+2)-(N-2)s}{N(s-1)} > \frac{\mu}{\mu-1}.$$

さらに, Tanaka [T] は上の  $s$  の条件を  $\frac{2(s+1)}{N(s-1)} > \frac{\mu}{\mu-1}$  にゆるめた. また,  $g(x, \xi) = |\xi|^{s-1}\xi$  という特殊な場合については, Bahri-Lions [BL] によって  $1 < s < \frac{N}{N-2}$  ( $N \geq 3$ ) または  $1 < s < \infty$  ( $N=2$ ) のとき, 方程式(1)は無限個の解をもつことが示された.

以上の既知結果のうち, 特に  $N=2$  の場合に注目すると,  $f \neq 0$  であっても  $g$  が適当な exponential growth 条件をみたす場合に, 方程式(1)は無限個の解をもつことが予想される. そこで, この問題を扱うために, (91)~(94)に加えて次の growth 条件を仮定する.

(g5)  $0 < \exists \alpha_1 \leq \exists \alpha_2 < 2$ ,  $\exists A_1, \exists A_2 > 0$ ,  $\exists B_1, \exists B_2 \geq 0$  s.t.  
 $A_1 e^{|\xi|^{\alpha_1}} - B_1 \leq G(x, \xi) = \int_0^\xi g(x, t) dt \leq A_2 e^{|\xi|^{\alpha_2}} + B_2$  for  $(x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ ,  
 さらに  $\alpha_1, \alpha_2$  は  $\frac{2}{\alpha_2} - 2 > \frac{1}{\alpha_1}$  をみたすものとする.

注意. 条件(g1)~(g5)をみたす具体例:  $g(x, u) = u e^{|u|^\alpha}$  ( $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ).

このとき次の定理が得られる.

定理.  $N=2$ で  $g$  は条件(g1)~(g5)をみたすものとする. このとき,  
 任意の  $f \in L^2(\Omega)$  に対して, 方程式(1)は無数個の解  $\{u_i\}_{i=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$   
 で  $\|u_i\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow \infty$  ( $i \rightarrow \infty$ ) をみたすものをもつ.

以下, いくつかの章を通して定理の証明を述べる.

## 2. Variational formulation and a modified functional

$E = H_0^1(\Omega)$  とおき,  $E$  のノルムとして  $\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^{1/2}$  を採用する. また,  $\|u\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |u|^p dx)^{1/p}$  と記す.

さて, 方程式(1)に対応する次の汎関数を考える.

$$I(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - G(x, u) - f \cdot u \right\} dx \quad \text{for } u \in E.$$

このとき, 条件(g1)および(g2)のもとで,  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  かつ

$$(I'(u), \varphi) = \int_\Omega \{ \nabla u \cdot \nabla \varphi - g(x, u) \varphi - f \cdot \varphi \} dx \quad \text{for } \varphi \in E.$$

が示される. ここで  $(\cdot, \cdot)$  は  $E^*(=H^{-1}(\Omega))$  と  $E$  の duality product.

したがって, 方程式(1)の解 ( $H^1$ -solution) を汎関数  $I$  の critical point としてとらえることができる.

次に, Rabinowitzの方法(cf. [R])に従い,  $I$ の修正汎関数  $J$ を構成する. まず, 条件(g3)より

$$\frac{1}{\mu}(\xi g(x, \xi) + a_1) \geq G(x, \xi) + a_2 \geq a_3 |\xi|^\mu \quad \text{for } (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

をみたす  $a_1, a_2, a_3 > 0$  が存在することに注意する. さらに,  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  を  $\chi(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi \leq 1) \\ 0 & (\xi \geq 2) \end{cases}$ ,  $-2 < \chi'(\xi) < 0$  ( $1 < \xi < 2$ ) をみたすようにとり,

$$Q(u) = A(I(u)^2 + 1)^{1/2}, \quad \psi(u) = \chi(Q(u)^{-1}) \int_{\Omega} (G(x, u) + a_2) dx$$

とおく. ここに,  $A$  は以下に述べる命題1の(2°)をみたすべく選ばれた  $u$  に依存しない正の定数である(cf. [Su]). ここで, 汎関数  $J$  を次のように定義する.

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx - \psi(u) \int_{\Omega} f \cdot u dx \quad \text{for } u \in E.$$

このとき,  $J \in C^1(E, \mathbb{R})$  であり, さらに次のことが成り立つ.

命題1.  $\exists B = B(\|f\|_{L^2(\Omega)}) > 0$ ,  $\exists M_0 = M_0(\|f\|_{L^2(\Omega)}) > 0$  s.t.

$$(1^\circ) \quad |J(u) - J(-u)| \leq B \{ (\log(|J(u)| + 1))^{1/\alpha_1} + 1 \} \quad \text{for } u \in E.$$

$$(2^\circ) \quad \text{もし } J(u) \geq M_0 \text{ かつ } J'(u) = 0 \text{ ならば } J(u) = I(u) \text{ かつ } I'(u) = 0.$$

$$(3^\circ) \quad J \text{ は次の Palais-Smale (PS) 条件をみたす.}$$

$$(PS) \quad \{u_j\}_{j=1}^\infty \subset E \text{ が } M_0 \leq J(u_j) \leq M \text{ および } \|J'(u_j)\|_{E^*} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

をみたすとき,  $\{u_j\}_{j=1}^\infty$  は収束部分列をもつ.

注意. 汎関数  $I$  そのものについては, 上の命題中の(1°)のような対称性からのずれの評価が得られない. このことが, 修正

汎関数  $J$  を導入した主因である.

命題 1 中の (1°) は,  $J$  の定義と条件 (95) の左辺の不等式を用いて容易に示される (cf. [Su]). (2°) および (3°) の証明については [R, Su] を参照されたい.

### 3. Minimax methods and an existence result

固有値問題:  $\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$  の固有値を  $\lambda_j$  ( $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ )

とし, 対応する固有関数  $e_j$  を  $\int_{\Omega} \nabla e_i \cdot \nabla e_j \, dx = \delta_{ij}$  をみたすようにとり,  $E_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$  とおく. このとき  $u \in E_n$  に対して  $\|u\| \leq \lambda_n^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)}$  が成り立つことに注意すれば, 次をみたす正数の列  $\{R_n\}$  がとれる.

$$\begin{cases} R_{n+1} > R_n \ (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ かつ } J(u) \leq 0 \text{ for } u \in E_n \setminus B_{R_n}, \\ \text{ここに, } B_{R_n} = \{u \in E; \|u\| \leq R_n\}. \end{cases}$$

ここで,  $D_n = B_{R_n} \cap E_n$  とおき

$$\Gamma_n = \{\gamma \in C(D_n, E); \gamma(-u) = -\gamma(u) \text{ in } D_n, \gamma(u) = u \text{ on } \partial D_n\},$$

$$U_n = \{u \in te_{n+1} + \omega; t \in [0, R_{n+1}], \omega \in B_{R_{n+1}} \cap E_n, \|u\| \leq R_{n+1}\},$$

$$\Lambda_n = \{H \in C(U_n, E); H|_{D_n} \in \Gamma_n, H(u) = u \text{ for } u \in \partial U_n \setminus D_n\}$$

と定義する. これらを用いて  $J$  に関する minimax-value を次のように定める.

$$b_n = \inf_{\gamma \in \Gamma_n} \max_{u \in D_n} J(\gamma(u)), \quad c_n = \inf_{H \in \Lambda_n} \max_{u \in U_n} J(H(u)).$$

このとき, 定義より  $C_n \geq b_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ). さらに次のことが示される.

命題2.  $C_n > b_n \geq M_0$  と仮定した上で,  $\exists \delta \in (0, C_n - b_n)$  をとり

$$\Lambda_n(\delta) = \{ H \in \Lambda_n; J(H(u)) \leq b_n + \delta \text{ for } u \in D_n \},$$

$$C_n(\delta) = \inf_{H \in \Lambda_n(\delta)} \max_{u \in U_n} J(H(u))$$

と定義する. このとき,  $C_n(\delta) \geq C_n$  であり,  $C_n(\delta)$  は汎関数  $I$  の critical value となる.

上の命題中の,  $C_n(\delta) \geq C_n$  という主張は定義より明らかである.  $C_n(\delta)$  が  $I$  の critical value であることをいうには命題1の(2°)より,  $C_n(\delta)$  が  $J$  の critical value であることを示せばよい. その証明は, 通常 "Deformation Lemma" を用いてなされる. 詳しくは  $[R, S_u]$  を参照されたい.

命題2により, 定理の証明には次のことを示せばよいことがわかる.

$$\begin{cases} \exists \{n_j\} \subset \mathbb{N} \text{ s.t.} \\ C_{n_j} > b_{n_j} \geq M_0 \text{ for } j \in \mathbb{N} \text{ かつ } b_{n_j} \rightarrow \infty (j \rightarrow \infty). \end{cases}$$

このような部分列を得るために,  $b_n$  の growth order を計算する必要がある. それには, Morse index に関連する評価(第4章)およびスペクトルに関連する評価(第5章)が必要である. それらの評価を用いて, 第6章で  $b_n$  の growth order の計

算を完結するであろう.

#### 4. A Morse index estimate

まず, 条件(95)の右辺の不等式より,  $\exists a_0 > 0, \exists C > 0$  で次をみたすものがとれることに注意する.

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - a_0 \int_{\Omega} e^{(u^2+1)^{\alpha/2}} dx - C \quad \text{for } u \in E.$$

ここで,  $G_0(u) = a_0 e^{(u^2+1)^{\alpha/2}}$  とおき,

$$K(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} G_0(u) dx \quad \text{for } u \in E.$$

と定義すると,  $J(u) \geq K(u) - C$  ( $\forall u \in E$ ) である. したがって,

$$d_n = \inf_{\delta \in \mathbb{R}} \max_{u \in D_n} K(\delta(u))$$

と定めれば,

$$b_n \geq d_n - C \quad \text{for } n \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

となる.

次に, " $u \in E \Rightarrow G_0''(u) \in L^p(\Omega)$  ( $\forall p \geq 1$ )" となることに注意し

$$\begin{aligned} K''(u)(h, h) &\equiv \int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx - \int_{\Omega} G_0''(u) h^2 dx \\ &= ((-\Delta - G_0''(u))h, h) \quad \text{for } h \in E. \end{aligned} \quad (4.2)$$

とおく. そして,  $K''(u)$  の "augmented Morse index" を次のように定義する.

$$\begin{aligned} m^*(K''(u)) &\equiv \max \{ \dim F ; F \text{ は } E \text{ の部分空間で} \\ &\quad K''(u)(h, h) \leq 0 \text{ for } \forall h \in F \text{ をみたす} \}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

このとき, Tanaka [T] の Theorem B の特別な場合として, 次



のことが示される.

命題 3. 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して, 次をみたす  $u_n \in E$  が存在する.

$$K(u_n) \leq d_n, \quad K'(u_n) = 0, \quad m^*(K''(u_n)) \geq n.$$

上の命題の証明については [T] を参照されたい.

## 5. A spectral estimate

固有値問題: 
$$\begin{cases} -\Delta h - V(x)h = \lambda h & \text{in } \Omega, \\ h = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{ここに } V \in L^p(\Omega), \exists p > 1)$$

の  $\lambda(\leq 0)$  以下の固有値の数 (重複も数えて) を  $N_\lambda(V, \Omega)$  と記す.

このとき, (4.2) および (4.3) により,

$$N_0(G_0''(u), \Omega) = m^*(K''(u)) \quad \text{for } u \in E \quad (5.1)$$

が示される. また, 一般に次の不等式が成り立つ.

命題 4.

$$N_0(V, \Omega) \leq C_0 \left\{ 1 + \int_{\Omega} V_+(x) \log(V_+(x) + 1) dx \right\},$$

ここに,  $C_0$  は  $V$  に依存しない正の定数,  $V_+(x) \equiv \max(V(x), 0)$ .

この命題の証明には E. Lieb [Li] によって得られた次の不等式 ( $N=2$  の場合) を用いる.

### E. Lieb の不等式 ( $N=2$ の場合)

$\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  は下半連続, convex で次をみたすものとする.

$$\varphi(t)/t^m \ (t \rightarrow \infty, \exists m > 0), \ \varphi(0) = 0, \ \int_0^\infty t^{-1} e^{-t} \varphi(t) dt = 1.$$

このとき,  $\varphi < 0$  に対して次の不等式が成り立つ.

$$N_\varphi(V, \mathbb{R}^2) \leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty t^{-1} e^{8t} S(x, x; t) \varphi(t V_+(x)) dt dx,$$

ここに,  $S(x, y; t)$  は  $\mathbb{R}^2$  における熱方程式の基本解で,  $S(x, x; t) = (4\pi t)^{-1}$ .

この E. Lieb の不等式の証明 ( $N \geq 3$  の場合も含めて) については [Li] を参照されたい.

命題 4 の証明. 上の  $\varphi$  として,  $\varphi(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1, \\ a(t-1) & t \geq 1. \end{cases}$  とおく.

ここに  $a \equiv (e^{-1} - \int_1^\infty t^{-1} e^{-t} dt)^{-1}$ . また,

$$1_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega, \end{cases} \quad \tilde{V}_+(x) = \begin{cases} V_+(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

とする. このとき,

$$N_0(V, \Omega) \leq N_0(V_+, \Omega) = N_{-1}(V_+ + 1, \Omega) \leq N_{-1}(\tilde{V}_+ + 1_\Omega, \mathbb{R}^2)$$

となることに注意して E. Lieb の不等式を用いれば,

$$\begin{aligned} N_0(V, \Omega) &\leq N_{-1}(\tilde{V}_+ + 1_\Omega, \mathbb{R}^2) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty t^{-1} e^{-t} (4\pi t)^{-1} \varphi(t(\tilde{V}_+(x) + 1_\Omega(x))) dt dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{\frac{1}{V_+(x)+1}}^\infty t^{-1} e^{-t} (4\pi t)^{-1} a \{t(V_+(x)+1) - 1\} dt dx \\ &\leq \frac{a}{4\pi} \int_{\Omega} (V_+(x)+1) \int_{\frac{1}{V_+(x)+1}}^\infty t^{-1} e^{-t} dt dx. \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } \int_{\frac{1}{V_+(x)+1}}^\infty t^{-1} e^{-t} dt \leq \int_{\frac{1}{V_+(x)+1}}^1 t^{-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} dt = \log(V_+(x)+1) + e^{-1}$$

となることに注意すれば, 命題4中の不等式が示される. ■

命題4で特に  $V(x) = G_0''(u(x))$  とおき (5.1) を用いると, 次の不等式が得られる.

$$m^*(K''(u)) \leq C_0 \left\{ 1 + \int_{\Omega} G_0''(u)_+ \log(G_0''(u)_+ + 1) dx \right\} \text{ for } u \in E. \quad (5.2)$$

### 6. An estimate from below on the growth of $b_n$

この章では, 先の二つの章の結果を用いて,  $b_n$  の growth order に関する次の命題を証明する.

命題5.  $\exists \theta_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$  s.t.

$$b_n \geq n(\log n)^{\frac{2}{d_2}-2} \text{ for } n \geq N_1.$$

証明. 以下,  $C_1, C_2, \dots, C'_1, C'_2, \dots$  は  $u \in E$  および  $n \in \mathbb{N}$  に依存しない定数とする. まず,  $G_0(\xi) = a_0 e^{\langle \xi \rangle^{d_2}}$  (ここに  $\langle \xi \rangle \equiv (\xi^2 + 1)^{1/2}$ ) であることから簡単な計算により次の不等式が得られる.

$$\begin{cases} G_0'(\xi) \xi \geq C_1 \langle \xi \rangle^{d_2} e^{\langle \xi \rangle^{d_2}} - C_2, \\ G_0''(\xi)_+ \leq C_3 \langle \xi \rangle^{2d_2-2} e^{\langle \xi \rangle^{d_2}}, \end{cases} \text{ for } \xi \in \mathbb{R}.$$

(4.1), 命題3, (5.2) および上の不等式を用いることにより,

$$\begin{aligned} b_n &\geq d_n - C \geq K(v_n) - C = K(v_n) - \frac{1}{2}(K'(v_n), v_n) - C \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} G_0'(v_n) v_n - G_0(v_n) \right\} dx - C \\ &\geq C'_1 \int_{\Omega} \langle v_n \rangle^{d_2} e^{\langle v_n \rangle^{d_2}} dx - C'_2, \end{aligned} \quad (6.1)$$

および

$$\begin{aligned} n \leq m^*(K''(u_n)) &\leq C_0 \left\{ 1 + \int_{\Omega} G_0''(u_n)_+ \log(G_0''(u_n)_+ + 1) dx \right\} \\ &\leq C_0' \int_{\Omega} \langle u_n \rangle^{3d_2-2} e^{\langle u_n \rangle^{d_2}} dx. \end{aligned}$$

すなわち

$$\int_{\Omega} \langle u_n \rangle^{3d_2-2} e^{\langle u_n \rangle^{d_2}} dx \geq C_4 n \quad \text{for } n \in \mathbb{N}. \quad (6.2)$$

ここで  $\varphi_0(\xi) = \begin{cases} \xi \{ \log(\xi+1) \}^{\frac{2}{d_2}-2}, & \xi \geq 0, \\ 0, & \xi \leq 0. \end{cases}$  とおくと条件(95)中の

$d_1, d_2$ に関する条件より  $\frac{2}{d_2}-2 > 2$  であるから,  $\varphi_0$ は単調増加, convexとなる. したがって, Jensenの不等式および $\varphi_0$ の定義を用いることにより,

$$\begin{aligned} \varphi_0\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \langle u_n \rangle^{3d_2-2} e^{\langle u_n \rangle^{d_2}} dx\right) &\leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi_0(\langle u_n \rangle^{3d_2-2} e^{\langle u_n \rangle^{d_2}}) dx \\ &\leq C_5 \int_{\Omega} \langle u_n \rangle^{d_2} e^{\langle u_n \rangle^{d_2}} dx \end{aligned} \quad (6.3)$$

(6.1), (6.2), (6.3)および $\varphi_0$ の定義により, 十分大きなすべての  $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} b_n &\geq C_1' \int_{\Omega} \langle u_n \rangle^{d_2} e^{\langle u_n \rangle^{d_2}} dx - C_2' \\ &\geq C_6 \varphi_0\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \langle u_n \rangle^{3d_2-2} e^{\langle u_n \rangle^{d_2}} dx\right) - C_2' \\ &\geq C_6 \varphi_0(C_4' n) - C_2' \geq \theta_1 n (\log n)^{\frac{2}{d_2}-2} \quad (\exists \theta_1 > 0) \end{aligned}$$

が成り立ち, 命題5の証明が終了する. ■

## 7. Proof of Theorem

定理の証明を完了するためには、次の命題が必要である。

命題 6. " $C_n = b_n \ \forall n \geq \exists n_0$ " が成り立つと仮定すると、

$$\exists \theta_2 > 0, \exists n_1 \geq n_0 \text{ s.t.}$$

$$b_n \leq \theta_2 n (\log n)^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{ for } n \geq n_1.$$

証明の概要. " $C_n = b_n \ \forall n \geq \exists n_0$ " なる仮定と命題 1 の (i') および  $b_n \rightarrow \infty$  (命題 5 による) となることを用いて、次の漸化不等式が得られる。

$$\exists \beta > 0 \text{ s.t. } b_{n+1} \leq b_n + \beta (\log b_n)^{\frac{1}{\alpha_1}} \text{ for } n \geq \exists n_1 (\geq n_0).$$

この不等式を用いて、帰納法により命題 6 が証明される。詳しくは [Su] を参照されたい。

以上で定理の証明の準備がととのった。

定理の証明. 条件  $\frac{\alpha_2 - 2}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1}$  を考慮すれば、命題 6 中の不等式は命題 5 中の不等式に矛盾することになる。したがって、命題 6 中の仮定 " $C_n = b_n \ \forall n \geq \exists n_0$ " が否定される。一方、定義より  $C_n \geq b_n (\forall n \in \mathbb{N})$  であり、さらに命題 5 より  $b_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$  である。これらのことから部分列  $\{n_j\} \subset \mathbb{N}$  で次をみたすものがとれる。

$$C_{n_j} > b_{n_j} \geq M_0, \quad b_{n_j} \rightarrow \infty (j \rightarrow \infty).$$

このとき、命題 2 により  $\{C_{n_j}(f)\}_{j=1}^{\infty}$  は汎関数  $I$  の critical value

の列で,  $C_n(S) \rightarrow \infty (j \rightarrow \infty)$  をみたく。したがって, これらの critical value に対応する critical point たちが, 定理にいう方程式(1)の  $H^1$ -solution の列となることがわかる。■

### References

- [AR] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.
- [BB] A. Bahri and H. Berestycki, Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), 1-32.
- [BL] A. Bahri and P.L. Lions, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), 1027-1037.
- [Li] E. Lieb, Proc. Sym. Pure Math. 36 (1980), 241-252.
- [R] P.H. Rabinowitz, Trans. Amer. Math. Soc. 272 (1982), 753-769.
- [St] M. Struwe, Manuscripta Math. 32 (1980), 335-364.
- [Su] K. Sugimura, Nonlinear Anal. T.M.A. (to appear).
- [T] K. Tanaka, Comm. Partial Diff. Eq. 14 (1989), 99-128.